Diferencijalne jednačine višeg reda

September 18, 2021

Uvod

Posmatramo DJ n-tog reda $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ koje se mogu zapisati u obliku $y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$ $(\bigstar)$.

Teorema

Neka su u jednačini $(\bigstar)$ *funkcija* f *i njeni parcijalni izvodi neprekidni u nekoj oblasti koja sadrži tačku određenu vrednostima* $x = x_0, y = y_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. *Tada postoji jeinstveno rešenje* $y = y(x)$ *jednačine* $(\bigstar)$ *koje zadovoljava uslove* $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$.

Uslovi $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ se nazivaju **početni uslovi**.

Definicija

Opšte rešenje DJ *($\bigstar$) je familija funkcija $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ koja zavisi od konstanti $C_1, ..., C_n$.*

Za zadate početne uslove postoje konstance $C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$ takve da $\varphi(x, C_1, ..., C_n)$ zadovoljava te uslove. ***Partikularno rešenje*** *jednačine ($\bigstar$) je ono rešenje koje se dobija iz opšteg stavljajući $C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$.*

Svođenje na DJ nižeg reda

1. $y^{(n)} = f(x)$ gde je $f(x)$ neprekidna funkcija. Rešenje se dobija integrisanjem n puta:
$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.
2. $y'' = f(x, y')$ - Uvodi se smena $z = y' \Rightarrow z' = y'' \Rightarrow z' = f(x, z)$ je jednačina prvog reda. Ako je njeno rešenje $z = \varphi(x, C_1)$ onda se rešavanjem $y' = \varphi(x, C_1)$ dobija opšte rešenje polazne:
$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.
3. $y'' = f(y, y')$ - Uvodi se smena
$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y$. Zamenom u polaznu jednačinu dobijamoDJ prvog reda: $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p)$. Ako je njeno rešenje $p = \varphi(y, C_1)$, vraćanjem smene
$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ dobijamo opšte rešenje polazne:
$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

Linearne DJ višeg reda

Definicija

Linearna diferencijalna jednačina (LDJ) n***-tog reda*** *je oblika* $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n(x)y = h(x)$ *gde su* $f_1, \dots, f_n$ *i* h *zadate funkcije.*

Ako je $h \equiv 0$ *onda je to* ***homogena LDJ*** n***-tog reda****.*

Definicija

Ako su $f_1, \dots, f_n$ *realne konstante dobija se* $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = h(x)$ ***LDJ*** n***-tog reda sa konstantnim koeficijentima*** *(LDJsKK).*

Definicija

*Za funkcije $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ definisane na (a, b) se kaže da su **linearno zavisne** na (a, b) ako postoje konstante $\alpha_1, ..., \alpha_n$ od kojih je bar jedna različita od 0 takve da $\alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

*Ako funkcije $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ nisu linearno zavisne onda su **linearno nezavisne**.*

Definicija

Za funkcije $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ funkcionalna determinanta

$$W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

zove se ***Vronskijeva determinanta*** *ili* ***Vronskijan****.*

Teorema

Rešenja $y_1, ..., y_n$ homogene LDJ n-tog reda sa konstantnim koeficijentima su linearno zavisna akko je $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, a linearno nezavisna akko je $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

Homogene LDJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$$\underbrace{y'' + py' + qy}_{L(y)} = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\heartsuit)$$

Teorema

Ako su y_1 i y_2 rešenja jednačine $(\heartsuit)$ onda je $C_1y_1 + C_2y_2,\ C_1, C_2 = const$ takođe rešenje jednačine $(\heartsuit)$.

Dokaz na času.

Teorema

Ako su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rešenja jednačine $(\heartsuit)$ onda je $y = C_1y_1 + C_2y_2,\ C_1, C_2 = const$ njeno opšte rešenje.

Dokaz na času.

Na osnovu teoreme rešavanje DJ ($\heartsuit$) se svodi na traženje linearno nezavisnih partikularnih rešenja.

Potražimo partikularna rešenja u obliku $y = e^{\lambda x},\ \lambda = const$
$\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Zamenom u ($\heartsuit$) $L(y) = y'' + py' + qy$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow L(e^{\lambda x}) &= \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} \\
&= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0
\end{aligned}$$

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ se zove **karakteristična jednačina** DJ ($\heartsuit$).

Prema prirodi karakteristične jednačine, razlikujemo 3 slučaja:

$\boxed{1.\ \textit{slucaj}}$

Koreni karakteristične jednačine su realni i različiti:
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Tada su partikularna rešenja: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

Važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$ pa su y_1 i y_2 linearno nezavisna partikularna rešenja (dokaz na času!).

Na osnovu teoreme, $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ je opšte rešenje jednačine ($\heartsuit$).

$\boxed{2.\ slucaj}$

Koreni karakteristične jednačine su realni i jednaki:
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 = s$.

Tada su partikularna rešenja: $y_1 = e^{sx}$ i $y_2 = xe^{sx}$.

Važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$ pa su y_1 i y_2 linearno nezavisna partikularna rešenja (dokaz na času!).

Na osnovu teoreme, $y = C_1 e^{sx} + C_2 x e^{sx} = (C_1 + xC_2)e^{sx}$ je opšte rešenje jednačine $(\heartsuit)$.

$\boxed{3.\ slucaj}$

Koreni karakteristične jednačine su kompleksni brojevi:
$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta \neq 0.$

Tada su partikularna rešenja:
$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$
$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$

Primenimo Ojlerovu formulu $e^{\pm i\beta x} = \cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)$:
$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
$y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Definicija

Izvod kompleksne funkcije $w(x) = u(x) \pm iv(x)$ gde su $u(x)$ i $v(x)$ realne funkcije, definiše se sa $w'(x) = u'(x) \pm iv'(x)$.

Teorema

Ako $w(x) = u(x) \pm iv(x)$ zadovoljava jednačinu $(\heartsuit)$ onda je zadovoljavaju i $u(x)$ i $v(x)$.

Dokaz na času.

Primenimo teoremu na y_1 i y_2:

$$y_1 = \underbrace{e^{\alpha x}\cos(\beta x)}_{u(x)} + i\,\underbrace{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}_{v(x)}$$

$$y_2 = \underbrace{e^{\alpha x}\cos(\beta x)}_{u(x)} - i\,\underbrace{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}_{v(x)}$$

$\Rightarrow u(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ i $v(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
su takođe rešenja jednačine ($\heartsuit$).

Važi da je $W(u, v) \neq 0$ pa su u i v linearno nezavisna partikularna rešenja (dokaz na času!).

Na osnovu teoreme,

$$\begin{aligned} y &= C_1 u(x) + C_2 v(x) \\ &= C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ &= e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)) \end{aligned}$$

je opšte rešenje jednačine ($\heartsuit$).

Nehomogene LDJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Linearne DJ n-tog reda sa konstantnim koeficijentima